GRAF *DIVISOR CORDIAL*

Deasy Bunga Agustina[1], YD. Sumanto[2], Bambang Irawanto[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Decy.bunga@gmail.com

ABSTRACT.A Let G = *(V, E)* be a graph and *bijection* map $f: V \rightarrow \{1,2,..|V|\}$. For every edge $uv \in E$ assign the label 1 if either $f(u)$ divide out of $f(v)$ or $f(v)$ divide out of $f(u)$ and assign the label 0 otherwise. A mapping f is called *divisor cordial* labeling if the difference between the number of edges having labels 0 and the number of edges having labels 1 which is to equal or less one. A graph has a *divisor cordial* labeling is called *divisor cordial* graph. Some special classes of graphs such as *full binary tree* graph, $G * K_{2,n}$ graph, $G * K_{3,n}$ graph where n even, $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)} >$ graph, $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, K_{1,n}^{(3)} >$ graph and sun graph $C_n \,.\, \overline{K_1}$ are *divisor cordial*.
Keywords : *divisor cordial* labeling, *full binary tree* graph, $G * K_{2,n}$ graph, $G * K_{3,n}$ graph, $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)} >$ graph, $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, K_{1,n}^{(3)} >$ graph and sun graph

I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Banyak yang dapat dipelajari dari suatu graf, salah satu diantaranya adalah pelabelan graf. Pelabelan merupakan pemetaan yang memetakan unsur himpunan titik dan unsur himpunan sisi ke bilangan bulat positif yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pemanfaatan teori pelabelan graf dapat dirasakan peranannya, terutama dalam sektor komunikasi dan transportasi, pembentukan molekul kimia, navigasi geografis, radar, pemancar frekuensi radio dan juga distribusi listrik. Hingga saat ini dikenal beberapa jenis pelabelan graf, salah satu diantaranya adalah pelabelan *divisor cordial.*

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1. [6] Diberikan graf G = *(V, E)* dengan pemetaan bijektif $f: V \rightarrow \{1,2,..|V|\}$. Untuk setiap sisi $uv \in E$ diberikan label 1 jika $f(u)|f(v)$ atau $f(v)|f(u)$ dan diberikan label 0 jika $f(u) \nmid f(v)$ dan $f(v) \nmid f(u)$. Pemetaan f disebut pelabelan *divisor cordial* jika $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$. Suatu graf G disebut graf *divisor cordial* jika memenuhi ketentuan pelabelan divisor cordial.

Teorema 2.2 [6] Diberikan bilangan bulat positif $n \geq 3$, maka terdapat graf *divisor cordial* G dengan n titik.

Bukti:

Kasus 1 $\quad$ *n* genap

Didefinisikan sebuah *path* yang mengandung $\frac{n}{2}+2$ titik yaitu $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{n}{2}+2}\}$ yang masing-masing dilabelkan dengan $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}+2$. Pelabelan sisi v_1v_2 adalah 1, karena $f(v_1)|f(v_2)$. Sedangkan untuk sisi lainnya v_iv_{i+1} $(2 \leq i \leq \frac{n}{2}+1)$ memiliki label 0, karena $(v_i) \nmid f(v_{i+1})$. Ditambahkan $\frac{n}{2}-2$ buah titik yaitu $\{v_{\frac{n}{2}+3}, v_{\frac{n}{2}+4}, \ldots, v_n\}$ yang masing-masing *adjacent* ke v_1, titik tersebut diberi label $\frac{n}{2}+3$, $\frac{n}{2}+4, \ldots, n$. Label dari sisi v_1v_i $(\frac{n}{2}+3 \leq i \leq n)$ adalah 1, karena $f(v_1)|f(v_i)$.

Kasus 2 $\quad$ *n* ganjil

Didefinisikan sebuah *path* $\frac{n+1}{2}+1$ titik, yaitu $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{n+1}{2}+1}\}$ yang masing-masing dilabelkan dengan $1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}+1$. Pelabelan sisi v_1v_2 adalah 1 karena $f(v_1) \mid f(v_2)$. Sedangkan untuk sisi lainnya v_iv_{i+1} dimana $(2 \leq i \leq \frac{n+1}{2})$ memiliki label 0, karena $(v_i) \nmid f(v_{i+1})$. Ditambahkan $\frac{n-1}{2}-1$ buah titik yaitu $\{v_{\frac{n+1}{2}+2}, v_{\frac{n+1}{2}+3}, \ldots, v_n\}$ yang masing-masing *adjacent* ke titik v_1, titik tersebut diberi label dengan $\frac{n+1}{2}+2$, $\frac{n+1}{2}+3, \ldots, n$. Label sisi v_1v_i dimana $(\frac{n+1}{2}+2 \leq i \leq n)$ adalah 1, karena $f(v_1)|f(v_i)$.

Teorema 2.3 [6] Jika G adalah graf *divisor cordial* yang banyak sisinya adalah genap, maka $G - e$ juga merupakan *divisor cordial* untuk semua $e \in E(G)$.

Teorema 2.4 [6] Jika G adalah graf *divisor cordial* dengan banyak sisinya adalah ganjil, maka terdapat $e \in E(G)$ sehingga $G - e$ juga merupakan *divisor cordial.*

Teorema 2.5 Jika G adalah graf *divisor cordial* yang banyak sisinya adalah genap, maka $G + e$ juga merupakan graf *divisor cordial* untuk semua $e \in E(K_n) - E(G)$.

Bukti

Diberikan suatu graf G yang mempunyai q sisi, dimana q genap. Karena G adalah graf *divisor cordial,* maka $e_f(0) = e_f(1) = \frac{q}{2}$.

Jika penambahan sisi e menghasilkan pelabelan 1 maka $e_f(0) = \frac{q}{2}$; $e_f(1) = \frac{q}{2} + 1$.

Jika penambahan sisi e menghasilkan pelabelan 0 maka $e_f(0) = \frac{q}{2} + 1$; $e_f(1) = \frac{q}{2}$, sehingga diperoleh $|e_f(0) - e_f(1)| = 1$ .Dengan demikian $G + e$ adalah graf *divisor cordial* karena memenuhi ketentuan pelabelan *divisor cordial* yaitu $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$.

Teorema 2.6 Jika G adalah graf divisor cordial ganjil, maka terdapat $e \in E(K_n) - E(G)$ sedemikian sehingga $G + e$ juga merupakan *divisor cordial*.

Definisi 2.7 [6] Pohon biner penuh (*full binary tree*) adalah pohon biner yang setiap titik internalnya mempunyai tepat dua buah cabang.

Teorema 2.8 [6] Setiap pohon biner penuh adalah graf *divisor cordial.*

Diberikan T adalah pohon biner penuh dan v merupakan akar dari T yang selanjutnya disebut sebagai titik level ke nol. Level ke-i dari T mempunyai 2^i titik. Jika T mempunyai m level, maka banyak titiknya adalah $2^{m+1} - 1$ titik, sedangkan banyak sisinya adalah $2^{m+1} - 2$ sisi.

Untuk titik level ke-0 diberikan label 2, level ke-1 diberikan label 3 dan label 1. Selanjutnya untuk titik level ke-i dengan $2 \leq i \leq m$ diberikan label $2^i, 2^i + 1, \ldots, 2^{i+1} - 1$ dari kiri ke kanan secara berurutan.

Banyaknya pelabelan sisi graf T untuk m level adalah $e_f(0) = e_f(1) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1$ sehingga $|e_f(0) - e_f(1)| = 0$. Jadi, graf pohon biner penuh merupakan graf *divisor cordial* karena $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$.

Definisi 2.9 [6] Suatu graf yang dibentuk dengan cara menggabungkan graf *divisor cordial* G dengan graf bipartit lengkap $K_{2,n}$ disebut dengan graf $G * K_{2,n}$.

Teorema 2.10 [6] Graf $G * K_{2,n}$ merupakan graf *divisor cordial.*

Misalkan G adalah graf *divisor cordial* dengan m titik. Titik v_k dan v_l pada graf G berhimpit dengan titik x_1 dan x_2 pada graf bipartit lengkap $K_{2,n}$ yang masing-masing diberi label 1 dan bilangan prima terbesar p sedemikian hingga $p \leq m$.

Misalkan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan bipartisi dari $K_{2,n}$ dengan $V_1 = \{x_1, x_2\}$ dan $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Kemudian dilabelkan $m + 1, m + 2, \dots, m + n$ berturut-turut pada titik $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Kasus 1 $\boldsymbol{p < m + n < 2p}$

Kelipatan bilangan prima p tidak termasuk dalam label y_i untuk $(1 \leq i \leq n)$. Sisi $K_{2,n}$ yang *incident* dengan titik v_k diberi label 1 dan yang *incident* dengan titik v_l diberi label 0.

Kasus 2 $\boldsymbol{m + n \geq 2p}$

Misalkan q adalah bilangan prima terbesar sehingga $q \leq m + n$ yang dilabelkan untuk beberapa y_i. Kemudian dengan menukar label v_l dengan y_i, yaitu p dan q maka q tidak dapat membagi $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Karena graf G merupakan graf *divisor cordial* dengan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$ maka graf $G * K_{2,n}$ juga *divisor cordial.*

Definisi 2.11 [6] Suatu graf yang dibentuk dengan cara menggabungkan graf *divisor cordial* G dengan graf bipartit lengkap $K_{3,n}$ disebut dengan graf $G * K_{3,n}$.

Teorema 2.12 [6] Graf $G * K_{3,n}$ dengan n genap merupakan graf *divisor cordial.*

Bukti:

Diberikan suatu graf *divisor cordial* G yang mempunyai titik sebanyak m. Diketahui bahwa v_k, v_l dan v_r pada graf G adalah titik yang mempunyai label $1, 2$, dan bilangan prima terbesar p sedemikian hingga $p \leq m$.

Misalkan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan bipartisi dari $K_{3,n}$ sedemikian sehingga $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Kemudian labeli titik x_1, x_2 dan x_3 pada $K_{3,n}$ yang masing-masing berhimpit dengan v_k, v_l dan v_r. Selanjutnya labeli titik $y_1, y_2, \ldots, y_n$ berturut-turut dengan $m + 1, m + 2, \ldots, m + n$.

Kasus 1 $\boldsymbol{p < m + n < 2p}$

Kelipatan bilangan prima p tidak termasuk dalam label y_i untuk $(1 \leq i \leq n)$. Sisi-sisi $K_{3,n}$ yang *incident* dengan titik v_k dilabeli 1, dan yang *incident* dengan titik v_r dilabeli 0. Sedangkan sisi v_l hanya dapat membagi bilangan genap saja sehingga $\frac{n}{2}$ sisi yang *incident* dengan v_l diberi label 1 dan $\frac{n}{2}$ sisi yang tersisa diberi label 0.

Kasus 2 $\boldsymbol{m + n \geq 2p}$

Misalkan q adalah bilangan prima terbesar sehingga $q \leq m + n$ yang dilabelkan untuk beberapa y_i. Pola pelabelan untuk titik v_k dan v_l sama seperti pola pelabelan pada Kasus 1. Sedangkan untuk v_r dilabeli dengan cara menukar label v_r dengan y_i, yaitu p dengan q sehingga sisi $K_{3,n}$ yang *incident* dengan titik v_r mempunyai label 0.

Jadi, sisi-sisi pada $K_{3,n}$ meberikan jumlah pelabelan yang sama yaitu sebanyak $e_f(0) = e_f(1) = n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$.

Karena graf G merupakan graf *divisor cordial* dengan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$ maka graf $G * K_{3,n}$ juga graf *divisor cordial.*

Definisi 2.13 [6] Diberikan dua buah graf star yaitu $K_{1,n}^{(1)}$ dan $K_{1,n}^{(2)}$, suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan kedua titik pusat (*apex*) dari dua buah graf star tersebut ke titik baru x disebut dengan graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)} >$.

Teorema 2.14 [6] Graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)} >$ merupakan graf *divisor cordial*.

Bukti:

Misalkan $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}$ adalah titik *pendant* dari $K_{1,n}^{(1)}$ dan $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}$ adalah titik *pendant* dari $K_{1,n}^{(2)}$. Titik c_1 dan c_2 berturut-turut merupakan titik pusat dari $K_{1,n}^{(1)}$ dan $K_{1,n}^{(2)}$, dimana titik-titik tersebut *adjacent* dengan titik baru yaitu x.

Selanjutnya didefinisikan pelabelan titik c_1 dengan 1 dan c_2 dengan p, dimana p adalah bilangan prima terbesar sedemikian sehingga $p \leq 2n + 3$. Titik-titik *pendant* pada G dilabelkan dengan sebarang bilangan selain 1 dan p sehingga diperoleh $|e_f(0) - e_f(1)| = |(n+1) - (n+1)| = 0$. Dengan demikian graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)} >$ merupakan graf *divisor cordial* karena $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$.

Definisi 2.15 [6] Diberikan salinan graf star sebanyak t. Suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan titik pusat dari beberapa graf star ke titik baru yaitu $x_1, x_2, , \ldots, x_{t-1}$ disebut dengan graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, \ldots, K_{1,n}^{(t)} >$.

Teorema 2.16 [6] Graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, K_{1,n}^{(3)} >$ merupakan graf *divisor cordial*.

Bukti:

Misalkan $v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$ adalah titik *pendant* dari $K_{1,n}^{(i)}$ dan c_i merupakan titik pusat dari $K_{1,n}^{(i)}$, untuk $i = 1,2,3$. Titik pusat c_1 dan c_2 *adjacent* dengan titik baru x_1 sedangkan titik pusat c_2 dan c_3 *adjacent* dengan titik baru x_2. Graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, K_{1,n}^{(3)} >$ mempunyai $3n + 5$ titik dan $3n + 4$ sisi. Selanjutnya didefinisikan pelabelan titik c_1 dengan 1, titik c_2 dengan 2 dan titik c_3 dengan p, dengan p adalah bilangan prima terbesar $p \le 3n + 5$. Titik-titik *pendant* pada G dilabelkan dengan bilangan selain 1, 2 dan p berdasarkan urutan bilangan ganjil genap.

Kasus 1 n Genap

Untuk n genap, banyaknya label genap = banyaknya label ganjil pada $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}, x_1, x_2$, dan setiap sisi yang *incident* dengan c_2 memberikan jumlah pelabelan yang sama untuk $e_f(0)$ dan $e_f(1)$ yaitu $\frac{n+2}{2}$. Sehingga graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, K_{1,n}^{(3)} >$ mempunyai $e_f(0) = e_f(1) = (n+1) + \frac{n+2}{2} = \frac{3n+4}{2}$.

Kasus 2 n Ganjil

Untuk n ganjil, banyaknya label ganjil adalah $\frac{n+1}{2}$ dan banyaknya label genap adalah $\frac{n+3}{2}$ pada $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}, x_1, x_2$, dan setiap sisi yang *incident* dengan c_2 memberikan jumlah pelabelan $e_f(0) = \frac{n+1}{2}$ dan $e_f(1) = \frac{n+3}{2}$.

Sehingga graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, K_{1,n}^{(3)} >$ mempunyai $e_f(0) = n + 1 + \frac{n+1}{2} = \frac{3n+3}{2}$ dan $e_f(1) = n + 1 + \frac{n+3}{2} = \frac{3n+5}{2}$.

Berdasarkan Kasus 1 dan Kasus 2 dapat disimpulkan bahwa graf $G = < K_{1,n}^{(1)},\ K_{1,n}^{(2)},\ K_{1,n}^{(3)} >$ merupakan graf *divisor cordial* karena $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$.

Definisi 2.17 [1] Suatu graf *corona* $C_n\,.\overline{K_r}$ yang mempunyai satu daun disebut dengan graf matahari (*sun graph*), yang dinotasikan dengan $C_n\,.\overline{K_1}$.

Sebelum membuktikan bahwa graf matahari $C_n\,.\overline{K_1}$ merupakan graf *divisor cordial,* akan ditunjukkan bahwa graf *path* dan graf *cycle* merupakan graf *divisor cordial.*

Teorema 2.18 [5] Graf *path* P_n adalah graf *divisor cordial*.

Bukti:

Misalkan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ adalah himpunan titik dari *path* P_n. Didefinisikan pelabelan titik $f : V(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,|V|\}$ mengikuti pola:

$$
\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 2^2 & \ldots, & 2^{k_1}, \\
3, & 3\times 2, & 3\times 2^2, & \ldots, & 3\times 2^{k_2}, \\
5, & 5\times 2, & 5\times 2^2, & \ldots, & 5\times 2^{k_3}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Pola pelabelan titik pada graf *path* adalah

$$
f(v_i)\begin{cases}
2^{i-1} \text{ dengan } 1 \leq i \leq k_1 + 1 \\
3.2^{i-k_1-2} \text{ dengan } k_1 + 2 \leq i \leq k_1 + k_2 + 2 \\
2^{i-k_1-k_2-3} \quad \text{ dengan } k_1 + k_2 + 3 \leq i \leq k_1 + k_2 + k_3 + 3 \\
\vdots \\
(2p-1)^{i-\sum k_j - p} \text{ dengan } \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p-1}} k_j + p \leq i \leq \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}} k_j + p
\end{cases}
$$

Kasus 1 n Genap

Untuk $n = 2,4,6,8,\ldots,2k$ dimana $k \geq 1$ maka diperoleh banyak sisi berlabel 0 dan 1 adalah $e_f(1) = \frac{n}{2}$ dan $e_f(0) = \frac{n-2}{2}$.

Kasus 2 n Ganjil

Untuk $n = 3,5,7,9,\ldots,2k + 1$ dimana $k \geq 1$ maka diperoleh banyak sisi berlabel 0 dan 1 adalah $e_f(1) = e_f(0) = \frac{n-1}{2}$.

Berdasarkan Kasus 1 dan Kasus 2 diperoleh $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$. Jadi, P_n merupakan graf *divisor cordial*.

Teorema 2.19 [5] Graf c*ycle* C_n adalah graf *divisor cordial*.

Bukti:

Misalkan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ adalah himpunan titik dari *cycle* C_n, pelabelan titiknya memiliki pola yang sama seperti pelabelan titik dalam pembuktian Teorema 2.18 pada graf *path* P_n, kecuali penukaran label v_1 dan v_2, yaitu label 1 dan 2. Karena titik awal pada graf *cycle* adalah genap yaitu 2, sedangkan titik v_n pasti berlabel ganjil (bukan 1) maka graf *cycle* memenuhi ketentuan pelabelan *divisor cordial* yaitu $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$. Jadi, terbukti C_n adalah graf *divisor cordial.*

Teorema 2.20 [6] Graf $C_n\,.\overline{K_1}$ merupakan graf *divisor cordial.*

Bukti:

Untuk pelabelan *cycle* pada graf matahari $C_n\,.\overline{K_1}$ sesuai pola pelabelan pada graf *cycle,* sedangkan pola pelabelan untuk graf *star* sebagai berikut:

Kasus 1 Untuk n genap

Misalkan banyaknya titik pada graf *cycle* adalah $n = 2,4,6, \ldots, 2k$ dan k_i adalah bilangan bulat terbesar sedemikian sehingga $2^{ki} \leq 2n$ maka pola pelabelan titiknya dapat dilihat pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Pola Pelabelan Graf Matahari $C_n\,.\overline{K_1}$ dengan n Genap

Titik pada Graf Star yang *Adjecent* dengan Titik Berlabel	Diberikan Label	Pelabelan Sisi yang *Incident* dengan C_n
1	$2^{k1}, 2^{k1} \leq 2n$	1
2	Sebarang titik ganjil pada graf star yang > n	0
3	$3.2^{k2}, 3.2^{k2} \leq 2n$	1
4	Sebarang titik ganjil pada graf star yang > n	0
5	$5.2^{k3}, 5.2^{k3} \leq 2n$	1

6	Sebarang titik ganjil pada graf star yang > n	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k-1$	$2(2k-1)$	1
$2k$	Sebarang titik ganjil pada graf star yang > n	0

Diperoleh pelabelan sisi pada graf matahari $C_n . \overline{K_1}$ adalah $e_f(0) = e_f(1) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ sehingga $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| = |n - n| = 0.$

Kasus 2 Untuk n ganjil

Misalkan banyaknya titik pada graf *cycle* adalah $n = 3,5,7,\ldots,2k+1$ maka pola pelabelan titiknya sama seperti Tabel 2.1 tetapi banyaknya pelabelan sisi pada graf matahari $C_n . \overline{K_1}$ ganjil adalah $e_f(0) = \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} = n$ dan $e_f(1) = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = n$ sehingga $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| = |n - n| = 0.$

Dengan demikian graf matahari $C_n . \overline{K_1}$ merupakan graf *divisor cordial* karena memenuhi ketentuan pelabelan *divisor cordial* yaitu $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1.$

III. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika graf G merupakan graf *divisor cordial* dengan banyak sisi genap atau ganjil maka graf $G - e$ dan graf $G + e$ juga merupakan graf *divisor cordial.*

Beberapa Graf khusus seperti graf pohon biner penuh dengan m level, graf $G * K_{2,n}$, graf $G * K_{3,n}$ dengan n genap, graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)} >$, graf $G = < K_{1,n}^{(1)}, K_{1,n}^{(2)}, K_{1,n}^{(3)} >$ dan graf matahari $C_n . \overline{K_1}$ merupakan graf *divisor cordial.*

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terimakasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Bapak Drs. YD. Sumanto, M.Si_selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan nasehat-nasehatnya selama ini.

2. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.
3. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis, Amin.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Kasmawati, Vajar. 2008. "*Pelabelan Total a-simpul Berurutan Busur Ajaib pada Gabungan Dua Graf yang Terdiri dari Graf Bintang dan Graf yang Mengandung Unicycle*". Skripsi. Jurusan Matematika. Universitas Indonesia. Depok.

[2] Munir, Rinaldi. 2007. "*Matematika Diskrit*". Bandung: Informatika Bandung.

[3] Ramanjaneluyu, dkk. 2008. Antimagic Labeling of aClass of Plannar Graphs. *Australian Journal of Combinatorics*. Vol.41, No.59, Hal.283-290.

[4] Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications Sixth Edition*. New York : Mcgraw-Hill Book Company.

[5] Varatharajan, R, S. Navaneethakrishnan, and K. Nagarajan, Divisor Cordial Graphs. 2011. *International Journal of Mathematics Combinatorics*, Vol.4, Hal.15-25.

[6] Varatharajan, R, S. Navaneethakrishnan, and K. Nagarajan, Special Classes of Divisor Cordial Graphs. 2012. *International Mathematical Forum*, Vol.7, Hal. 1737-1749.

[7] Wilson, J. Robin and John J. Watkins. 1990. *Graphs An Introductory Approach*. New York : University Course Graphs, Network, and Design.